UEBER

SINGULARITÄTEN EBENER KURVEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

JAMES EUGENE MANCHESTER
AUS AUSTIN, MINN., U. S. A.

TÜBINGEN, 1899
DRUCK VON H. LAUPP JR.

UEBER

SINGULARITÄTEN EBENER KURVEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

JAMES EUGENE MANCHESTER
AUS AUSTIN, MINN., U. S. A.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

TÜBINGEN, 1899
DRUCK VON H. LAUPP JR.

Von der Fakultät angenommen am 14. Juni 1899.

Meiner lieben Frau

gewidmet.

INHALT.

Seite

Vorrede 6

Einleitung 7

§ 1. Parametrische Darstellung der Punkt- und Linienkoordinaten der Zweige der Kurve, gebildet aus den Reihenentwickelungen der Singularität 9

§ 2. Die Spitzen-Aequivalenzzahl und die Wendepunkt-Aequivalenzzahl der Singularität 10

§ 3. Die Doppelpunkt-Aequivalenzzahl der Singularität 11

§ 4. Herstellung der Reihenentwickelung für die Linienkoordinaten aus der Reihenentwickelung für die Punktkoordinaten . . . 14

§ 5. Die kritischen Exponenten der v-Entwickelung 16

§ 6. Die Doppeltangenten-Aequivalenzzahl der Singularität . . . 19

§ 7. Die Näherungskurve der gegebenen Kurve in der Singularität 21

§ 8. Die rational-ganze Näherungskurve 24

§ 9. Deformation der rationalen Näherungskurve 26

§ 10. Stetigkeit der Deformation der Singularitäten der Näherungskurve 29

§ 11. Reihenentwickelung für eine Nullpunktssingularität einer algebraischen Raumkurve 31

§ 12. Ein geometrisches Verfahren, nach Analogie der Newton'schen Regel 32

§ 13. Anwendung dieses Verfahrens auf die Bestimmung des Parameters der Doppelpunkte und Doppeltangenten der deformierten Näherungskurve, welche durch Deformation aus der Nullpunktssingularität hervorgehen 36

VORREDE.

Die vorliegende Arbeit giebt eine teilweise neue Methode zur Auflösung einer zusammengesetzten Singularität. Die §§ 1—6 enthalten eine Aufzählung der Ergebnisse von H. J. Stephen Smith's Arbeit über Singularitäten und eine neue Methode für die Herstellung der Linienkoordinaten-Entwickelungen in einem singulären Punkt aus denjenigen für die Punktkoordinaten und damit einen neuen Beweis des Satzes, dass die kritischen Exponenten der Punkt- und Linienkoordinaten-Entwickelungen sich gegenseitig entsprechen. Die Darstellung ist etwas ausführlicher gehalten, als in der nicht leicht zu lesenden Arbeit von Smith, und mit kurzen Beispielen versehen.

Die §§ 7—10 beschäftigen sich, im Anschluss an die Abhandlung des Herrn Professor Brill „Ueber Singularitäten ebener algebraischen Kurven" (Bd. 16, Math. Ann.), mit der Frage der Auflösung der Singularität einer rationalen Kurve in die ihr aequivalenten elementaren, wobei in den §§ 11—13 die Auflösung von Singularitäten, die aus superlinearen zusammengesetzt sind, eingehend untersucht wird. Dies ist ermöglicht durch Ausdehnung der Parallelogramm-Methode, die Newton für Singularitäten ebener Kurven angegeben hat, auf superlineare Zweige einer Raumkurve (§§ 11—12).

Ich möchte bei dieser Gelegenheit den Herren Professoren Dr. von Brill und Dr. Stahl in Tübingen meinen herzlichen Dank aussprechen für die vielseitige Anregung, welche ich in meinen Studien von ihnen erfahren durfte, insbesondere aber dem Herrn Professor v. Brill für das Interesse, welches er dieser Arbeit gewidmet hat.

EINLEITUNG.

Bekanntlich ist jede Singularität einer ebenen Kurve, deren Gleichung in Cartesischen Koordinaten gegeben ist,

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{1}$$

durch eine oder mehrere Reihenentwickelungen für die eine Koordinate definiert, die nach Potenzen der anderen Koordinate fortschreitet[1]). Wenn die Singularität im Ursprung ist, sind diese Entwickelungen von der Form

$$y = \alpha_1^{(i)} x^{\frac{\rho_1^{(i)}}{\Delta_i}} + \alpha_2^{(i)} x^{\frac{\rho_2^{(i)}}{\Delta_i}} + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{2}$$

wo die α konstant und $\frac{\rho_1^{(i)}}{\Delta_i} < \frac{\rho_2^{(i)}}{\Delta_i} < \ldots$ positive Brüche mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner Δ_i sind. Wenn man voraussetzt, wie wir in der vorliegenden Arbeit es thun, dass das Koordinatensystem so gewählt wird, dass die y-Axe nicht eine Tangente der Kurve im Ursprung ist, dann ist $\frac{\rho_1^{(i)}}{\Delta_i} \geq 1$. Die Reihenentwickelungen gelten bekanntlich auf der verzweigten Riemann'schen Fläche über die nächste Umgebung des Punktes $x = 0$ hinaus bis zum nächsten Verzweigungs- oder Unstetigkeitspunkt.

$\sum_{i=1}^{i=k} \Delta_i$ ist die Anzahl der im Ursprung liegenden Schnittpunkte einer unbestimmten durch den Ursprung gehenden Geraden mit der Näherungskurve (2); andererseits ist die Anzahl der im Ursprung liegenden Schnittpunkte einer solchen Geraden mit der Kurve (1) gleich der Dimension m des Glieds von niedrigster Dimension in (1). Also hat man

$$\Sigma \Delta_i = m.$$

---

1) Siehe „Untersuchungen über die algebraischen Functionen" von *V.* Puiseux dargestellt von Hermann Fischer, auch Höhere ebene Kurven von George Salmon, Deutsch bearbeitet von Fiedler, 2. Auflage, S. 59. Das Verfahren hat zuerst Newton angegeben.

Aus dieser Gleichung erkennt man, wann die Entwickelungen (2) hinreichend weit fortgesetzt sind.

Nach Cayley[1]) definiert jede der k Entwickelungen (2) einen „Zweig“ der Kurve (1) in der betrachteten Singularität. Ist für einen besonderen Zweig $\Delta = 1$, so nennt ihn Cayley einen „linearen“, ist $\Delta > 1$, einen „superlinearen“. Wegen der Mehrdeutigkeit der Koefficienten der Entwickelung in dem letzten Fall besteht der Zweig aus Δ „Partialzweigen“.

Besitzt eine Kurve in einem gegebenen Punkt zwei oder mehrere lineare oder superlineare Zweige, so heisst die Singularität in diesem Punkt eine „zusammengesetzte“.

Cayley nennt den Doppelpunkt (einschliesslich der Spitze) und die Doppeltangente (einschliesslich des Wendepunkts) einer ebenen Kurve „elementare“ Singularitäten. Wie Cayley vermutet, und wie Halphen, Zeuthen, Noether und H. J. Stephen Smith[2]), letzterer durch Aufstellung der Reihenentwickelungen für Punkt- und Linienkoordinaten, bewiesen haben, lässt sich in Bezug auf die bekannten Plücker'schen Formeln jede höhere Singularität einer ebenen Kurve durch eine Anzahl von elementaren Singularitäten ersetzen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Auflösung einer zusammengesetzten Singularität einer ebenen Kurve. Unter Auflösung verstehen wir die folgenden vier Operationen:

a) die Bildung der Reihenentwickelungen in der betreffenden Singularität;

b) die Bildung einer „Näherungskurve“ aus diesen Reihenentwickelungen, nämlich einer rationalen Kurve, die mit der gegebenen Kurve in der Singularität übereinstimmt, d. h. deren Reihenentwickelungen mit derjenigen der gegebenen Kurve in sovielen Gliedern übereinstimmt, dass sie dieselben elementaren Singularitäten enthält. Die Koordinaten dieser rationalen Kurve stellen sich als rationale Funktionen eines Parameters dar;

c) eine solche kleine „Deformation“ dieser Näherungskurve, dass aus der Singularität diejenigen elementaren Singularitäten getrennt hervorgehen, welche in Anzahl und Art das Aequivalent der Singu-

1) „On the Higher Singularities of a Plane Curve“, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. VII, pag. 212.

2) „On the Higher Singularities of Plane Curves“, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. V und VI.

larität bilden, während zugleich Ordnung, Klasse und Geschlecht der Näherungskurve durch die Deformation nicht geändert werden. Die Deformation erfolgt durch Addition gewisser Glieder zu den rationalen Funktionen von λ, welche die Koordinaten darstellen, multipliziert mit einer Grösse ε, die als sehr klein angesehen wird. Daher wird sich für einen verschwindenden Wert von ε die deformierte Kurve auf die undeformierte Kurve reduzieren;

d) die Bestimmung der Lage der elementaren Singularitäten der deformierten Kurve.

Wir beschränken uns im folgenden keineswegs auf die Annahme reeller Koefficienten oder Variabeln der Kurvengleichung; nur des kürzeren Ausdrucks wegen wählen wir die Einkleidung in die Sprache der Geometrie.

§ 1. Parametrische Darstellung der Punkt- und Linienkoordinaten der Zweige der Kurve, gebildet aus den Reihenentwickelungen der Singularität.

Es wird angenommen, dass die Gleichung der Kurve (1) der Einleitung gegeben ist, und dass diese Kurve eine irgendwie zusammengesetzte Singularität besitzt, die wir durch Parallelverschiebung des Koordinatensystems uns in den Ursprung verlegt denken wollen. Man stelle zunächst die Reihenentwickelungen der Kurve in diesem Punkt auf. Seien (2) diese Entwickelungen. Aus diesen bildet man die parametrische Darstellung der Punktkoordinaten x und y der k Zweige der Kurve in der zu lösenden Singularität, wie folgt[1]):

$$(3)\quad \left.\begin{aligned} x &= a_i^{\Delta_i}\ (\lambda - h_i)^{\Delta_i} \\ y &= \alpha_1^{(i)}\ a_i^{\rho_1^{(i)}}\ (\lambda - h_i)^{\rho_1^{(i)}} + \alpha_2^{(i)}\ a_i^{\rho_2^{(i)}}\ (\lambda - h_i)^{\rho_2^{(i)}} + \ldots . \end{aligned}\right\} (i = 1,2,..,k),$$

wo λ ein Parameter ist, h_i beliebige von einander verschiedene Konstanten, reell, wenn die Koefficienten α reell sind, a_i später zu bestimmende Konstanten.

Man stellt aus (3) die Linienkoordinaten u und v der k Zweige der Kurve dar, wie folgt:

---

1) „Ueber Singularitäten ebener algebraischer Kurven und eine neue Kurvenspecies“ von A. Brill, Math. Annalen Bd. XVI.

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} u \equiv u(\lambda) \equiv \dfrac{\dfrac{dy}{d\lambda}}{\dfrac{dx}{d\lambda}} = c_1^{(i)} (\lambda - h_i)^{\rho_1^{(i)} - \Delta_i} + c_2^{(i)} (\lambda - h_i)^{\rho_2^{(i)} - \Delta_i} + \ldots . \\ \\ v \equiv v(\lambda) \equiv ux - y = d_1^{(i)} (\lambda - h_i)^{\rho_1^{(i)}} + d_2^{(i)} (\lambda - h_i)^{\rho_2^{(i)}} + \ldots . \end{array} \right\}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

wo $c_t^{(i)} = \alpha_t^{(i)} \rho_t^{(i)} a_i^{\rho_t^{(i)} - \Delta_i}$, $d_t^{(i)} = a_t^{(i)} a_i^{\rho_t^{(i)}} \left(\dfrac{\rho_t^{(i)}}{\Delta_i} - 1 \right)$.

Weil die y-Axe nicht Tangente der Kurve (1) im Ursprung ist, so ist $\Delta_i \leq \rho_1^{(i)}$, daher sind u und v ganze Funktionen von λ.

§ 2. Die Spitzen-Aequivalenzzahl und die Wendepunkt-Aequivalenzzahl der Singularität.

Wenn die rationalen ganzen Funktionen von λ $x = x(\lambda)$ und $y = y(\lambda)$ Cartesische Punktkoordinaten einer rationalen Kurve darstellen, so wird eine gewöhnliche Spitze (Rückkehrpunkt) durch jeden Wert von λ geliefert, welcher den beiden Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\lambda + \delta\lambda) = x(\lambda) \\ y(\lambda + \delta\lambda) = y(\lambda) \end{array} \right\}$$

— also den Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x(\lambda + \delta\lambda) - x(\lambda)}{\delta\lambda} \equiv x' = 0 \\ \dfrac{y(\lambda + \delta\lambda) - y(\lambda)}{\delta\lambda} \equiv y' = 0 \end{array} \right\}$$

— gleichzeitig genügt. Aber wenn x' und y' aus (3) § 1 gebildet sind, so wird die Gleichung $y' = 0$ für jeden Wert von λ erfüllt, welcher der Gleichung $x' = 0$ genügt. Daher ist

$$(4) \qquad x' \equiv \rho(\lambda) = 0$$

die Gleichung der Spitzen von (3).

Wenn ferner $u \equiv u(\lambda)$ und $v \equiv v(\lambda)$ Linienkoordinaten sind, welche rationale ganze Funktionen von λ sind, so gehört zu einem Wendepunkt jeder Wert von λ, welcher den beiden Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = 0 \\ v' = 0 \end{array} \right\}$$

gleichzeitig genügt. Aber wenn u' und v' aus (3') gebildet sind, so genügt der Gleichung $v' = 0$ jeder Wert von λ, welcher der Gleichung $u' = 0$ genügt. Daher ist

(4′) $$u' \equiv \bar{\omega} = 0$$

die Gleichung der Wendepunkte von (3′).

Also hat man aus (4)

(I.) $$\sum_{i=1}^{i=k} (\Delta_i - 1) \equiv r$$

als die Spitzen-Aequivalenzzahl, und aus (4′)

(I.′) $$\sum_{i=1}^{i=k} (\rho_1^{(i)} - \Delta_i - 1) \equiv w$$

als die Wendepunkt-Aequivalenzzahl der Singularität.

§ 3. Die Doppelpunkt-Aequivalenzzahl der Singularität.

Man erhält die Gesammtzahl der Doppelpunkte der Singularität, indem man die Anzahl der Schnittpunkte jedes der k Zweige (3) § 1 mit sich selbst und die Anzahl der Schnittpunkte jedes dieser Zweige mit jedem anderen für den Nullpunkt berechnet, und die so erhaltenen Zahlen addiert. Die Summe, die man in dieser Weise bekommt, giebt die Anzahl der Doppelpunkte (einschliesslich der Spitzen).

Smith hat gezeigt, dass die Zahl, welche diese Summe angiebt, gleich der Ordnung des Verschwindens des Produkts

$$\Pi(y_h - y_k) \quad (h \gtrless k)$$

ist, die Ordnung von x als Einheit genommen, wenn man das Produkt bildet für alle Werte von y, welche durch die Entwickelungen (2) gegeben sind. Diese Ordnung nennt er „den totalen Diskriminanten-Index" der Singularität, und die Ordnung des Verschwindens dieses Produkts, gebildet nur für einen superlinearen Zweig, „den Diskriminanten-Index des Zweigs" oder, im Fall, dass andere Zweige vorhanden sind, einen „Partialdiskriminanten-Index der Singularität.

Auch hatten schon Cayley und andere begründet, dass hinsichtlich des Diskriminanten-Index der Singularität eine Spitze als $\frac{3}{2}$ Doppelpunkte zählt. Ist also δ die Doppelpunkt-Aequivalenzzahl und ist I der totale Diskriminanten-Index der Singularität, so hat man

$$2\delta = 2I - 3 \sum_{i=1}^{i=k} (\Delta_i - 1).$$

Die Anzahl δ_1 von Schnittpunkten eines superlinearen Zweigs

(a) $$y = \alpha_1 x^{\frac{\rho_1}{\Delta}} + \alpha_2 x^{\frac{\rho_2}{\Delta}} + \ldots$$

mit sich selbst ist durch die folgende Gleichung gegeben:

(5) $$2\delta_1 = (\gamma - 3)(\Delta - \Delta_1) + (\gamma_1 - 3)(\Delta_1 - \Delta_2) + \ldots,$$

wo Δ_1 der grösste gemeinschaftliche Divisor von ρ_1 und Δ ist, γ_1

die erste der Zahlen ρ, die durch Δ_1 nicht teilbar ist, Δ_2 der grösste gemeinschaftliche Divisor von γ_1 und Δ_1, γ_2 die erste der Zahlen ρ, die durch Δ_2 nicht teilbar ist, Δ_3 der grösste gemeinschaftliche Divisor von γ_2 und Δ_2, u. s. w., und wo γ für ρ_1 gesetzt ist. Weil die Zahlen ρ und Δ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so kommt man zuletzt auf eine Zahl Δ_t gleich Eins; dann wird die Reihe der rechten Seite von (5) aufhören.

Die Zahl δ_1 schliesst die Spitzenäquivalenzzahl nicht ein und ist stets ganz und positiv.

Man bemerkt, dass der Wert von δ_1 nicht von allen den Exponenten $\frac{\rho}{\Delta}$ abhängt, sondern nur von denjenigen Exponenten, in deren Nennern, wenn sie auf ihre einfachste Form gebracht sind, ein neuer Faktor zum erstenmal auftritt. Solche Exponenten sind von Smith „kritische Exponenten“ und von Halphen „charakterische“ genannt.

Beispiel. Der superlineare Zweig

$$\begin{aligned} y &= \alpha_1 x^{\frac{3}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{5}{3}} + \alpha_3 x^{\frac{7}{4}} + \alpha_4 x^{\frac{13}{6}} + \ldots . \\ &= \alpha_1 x^{\frac{18}{12}} + \alpha_2 x^{\frac{20}{12}} + \alpha_3 x^{\frac{21}{12}} + \alpha_4 x^{\frac{26}{12}} + \ldots \end{aligned}$$

hat $\delta_1 = \dfrac{15\ (12-6) + 17\ (6-2) + 18\ (2-1)}{2} = 88$

Schnittpunkte mit sich selbst (ausser 11 Spitzen). Die kritischen Exponenten sind $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$.

Die Anzahl δ_2 gegenseitiger Schnittpunkte von zwei Zweigen, deren Entwickelungen für eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern mit einander identisch sind, wird von Smith, wie folgt, gegeben: Seien

$$\text{(b)} \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \alpha_1 x^{\frac{\rho_1}{\Delta}} + \alpha_2 x^{\frac{\rho_2}{\Delta}} + \ldots + \alpha_i x^{\frac{\rho_i}{\Delta}} + \beta x^{\frac{\sigma}{\Delta}} + \ldots . \\ y &= \alpha_1 x^{\frac{\rho'_1}{\Delta'}} + \alpha_2 x^{\frac{\rho'_2}{\Delta'}} + \ldots + \alpha_i x^{\frac{\rho'_i}{\Delta'}} + \beta' x^{\frac{\sigma'}{\Delta'}} + \ldots . \end{aligned} \right\}$$

die zwei Zweige, deren Entwickelungen hinsichtlich der ersten i Glieder übereinstimmen mögen. Ist dann d der grösste gemeinschaftliche Teiler von Δ und Δ', und haben die ersten i Glieder dieser Entwickelungen die Form

$$\alpha_1 x^{\frac{\gamma_1}{d}} + \alpha_2 x^{\frac{\gamma_2}{d}} + \ldots + \alpha_i x^{\frac{\gamma_i}{d}} ,$$

so hat man:

(6) $\delta_2 = \frac{h\Delta\Delta'}{d} + \frac{\Delta\Delta'}{d}\,[\sigma(d-d_1) + \sigma_1(d_1-d) + \ldots]$, wo

h der nächst höhere Exponent nach $\frac{\gamma_i}{d}$ von den beiden Entwickelungen ist, d_1 der grösste gemeinschaftliche Divisor von γ_1 und d, σ_1 die erste der Zahlen γ, welche durch d_1 nicht teilbar ist, d_2 der grösste gemeinschaftliche Divisor von σ_1 und d_1, σ_2 die erste der Zahlen γ, welche durch d_2 nicht teilbar ist, u. s. w., und wo σ für γ geschrieben ist.

Beispiel. Für die zwei Zweige

$$y = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + \ldots\ldots$$

$$y = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{3}} + \ldots\ldots$$

sind $\Delta = 6$, $\Delta' = 2$, $h = \frac{5}{3}$, $d = 2$, $d_1 = 1$, $\sigma = 3$ $\therefore \delta_2 = 19$.

Man kann δ_2 für dieses Beispiel direkt berechnen, wie folgt: Die Partialzweige des ersten Zweigs sind

$y_1 = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}} + \ldots\ldots$, $y_2 = -x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}} - \ldots$; die des zweiten Zweigs sind

$$y'_1 = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{3}} + \ldots,\quad y'_2 = x^{\frac{3}{2}} + \omega x^{\frac{5}{3}} + \ldots,\quad y'_3 = x^{\frac{3}{2}} + \omega^2 x^{\frac{5}{3}} + \ldots,$$

$$y'_4 = -x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{3}} + \ldots,\quad y'_5 = -x^{\frac{3}{2}} + \omega x^{\frac{5}{3}} + \ldots,\quad y'_6 = -x^{\frac{3}{2}} + \omega^2 x^{\frac{5}{3}} + \ldots$$

$$(\omega^3 = 1)$$

Hieraus bildet man $\Pi(y_h - y'_k)$,

$$\text{wo } h = 1, 2, 3,\quad k = 1, 2, 3,\quad (h \gtrless k),$$

und findet, dass die Ordnung des Verschwindens dieses Produkts 19 ist, wenn die Ordnung von x als Einheit genommen wird.

Wir bemerken noch, dass die Zweige

$$\text{(c)}\quad \begin{cases} y = \sum_{e=1}^{e=e} a_e x^{m_e} + \alpha_1 x^{\frac{\rho_1}{\Delta}} + \ldots + \alpha_i x^{\frac{\rho_i}{\Delta}} + \beta x^{\frac{\sigma}{\Delta}} + \ldots \\ y = \sum_{e=1}^{e=e} a_e x^{m_e} + \alpha_1 x^{\frac{\rho'_1}{\Delta'}} + \ldots + \alpha_i x^{\frac{\rho'_i}{\Delta'}} + \beta' x^{\frac{\sigma'}{\Delta'}} + \ldots \end{cases}$$

wo die m beliebige ganze positive Zahlen sind, genau dieselbe Anzahl von Schnittpunkten gemeinsam haben, wie die Zweige (b).

Die Anzahl δ_3 der gegenseitigen Schnittpunkte zweier Zweige

$$(d)\quad \begin{cases} y = \alpha_1 x^{\frac{\rho_1}{\Delta}} + \alpha_2 x^{\frac{\rho_2}{\Delta}} + \dots \\ y = \alpha'_1 x^{\frac{\rho'_1}{\Delta'}} + \alpha'_2 x^{\frac{\rho'_1}{\Delta'}} + \dots \end{cases}$$

deren Entwickelungen kein gemeinschaftliches Anfangsglied besitzen, ist $\delta_3 = \left(\frac{\rho_1}{\Delta}\Delta'\right)\Delta = \rho_1\Delta'$,

unter der Voraussetzung, dass $\frac{\rho_1}{\Delta} \leqq \frac{\rho'_1}{\Delta}$ ist.

Ist $\Sigma\delta_1$ die Summe der Zahlen δ, berechnet für alle superlineare Zweige von (3) § 1, $\Sigma\delta_2$ die Summe, berechnet für alle Paare von Zweigen von (3), deren Entwickelungen gemeinschaftliche Anfangsglieder besitzen, $\Sigma\delta_3$ die Summe, berechnet für alle Paare von Zweigen, deren Entwickelungen keine gemeinschaftlichen Anfangsglieder besitzen, so hat man schliesslich

(II.) $$\delta = \Sigma\delta_1 + \Sigma\delta_2 + \Sigma\delta_3$$

als die Doppelpunkt-Aequivalenzzahl der Singularität.

Es werden nun mit Hilfe der Parameterdarstellung für die Punktkoordinaten die Reihen abgeleitet werden, nach denen die Linienkoordinaten sich entwickeln lassen, und auf diese Weise soll der oben (Einleitung) ausgesprochene Satz von Smith bestätigt werden.

§ 4. Herstellung der Reihenentwickelung für die Linienkoordinaten aus der Reihenentwickelung für die Punktkoordinaten.

Man nimmt an, dass die Reihenentwickelung

$$y = \alpha_1 x^{\frac{\rho_1}{\Delta}} + \alpha_2 x^{\frac{\rho_2}{\Delta}} + \dots\dots$$

vorliegt. Hieraus soll die Linienkoordinate v nach positiven Potenzen von u entwickelt werden, wo, wie immer, u und v durch die folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} u = \dfrac{\dfrac{dy}{d\lambda}}{\dfrac{dx}{d\lambda}} \\ v = ux - y \end{cases}$$

definiert sind.

Setzt man $x = \lambda^{\Delta}$, so hat man

$$y = \alpha_1 \lambda^{\rho_1} + \alpha_2 \lambda^{\rho_2} + \dots\dots,$$

und ferner

$$\begin{cases} u = h_1 \lambda^{a_1} \sum_{e=2}^{e} \left(1 + \frac{h_e}{h_1} \lambda^{a_e - a_1}\right) \\ v = k_1 \lambda^{\rho_1} \sum_{e=2}^{e} \left(1 + \frac{k_e}{k_1} \lambda^{\rho_e - \rho_1}\right) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 < a_2 < \ldots\ldots \\ \rho_1 < \rho_2 < \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

wo $a_e = \rho_e - \Delta$, $h_e = \frac{\alpha_e \rho_e}{\Delta}$, $k_e = \alpha_e \left(\frac{\rho_1 - \Delta}{\Delta}\right)$.

Setzt man diese Werte von u und v in die folgende Gleichung ein:

$$v = \sum_i c_i u^{m_i},$$

wo zunächst die c und m noch unbestimmt sind, so erhält man für genügend kleine Werte von λ, d. h. in der Umgebung des Nullpunkts,

(a) $$v = \sum_i L_i + A_i^{(1)} s + A_i^{(2)} s^2 + \ldots\ldots,$$

wo $$s = \sum_{e=2}^{e} \frac{h_e}{h_1} \lambda^{a_e - a_1}, \quad L_i = c_i h_1^{m_i} \lambda^{a_1 m_i},$$

$$A_i^{(n)} = \frac{m_i(m_i-1)(m_i-2)\ldots(m_i-n+1)}{(n-1)!} L_i.$$

Vergleicht man die Koefficienten der niedrigsten Potenzen von λ links und rechts, so bestimmt sich m_1 und c_1 aus der Gleichung

$$L_1 = k_1 \lambda^{\rho_1}.$$

Hieraus hat man

$$m_1 = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \Delta}, \quad c_1 = \frac{k_1}{h_1^{m_1}}.$$

Die niedrigste von den übrigen Potenzen von λ in v ist ρ_2. Rechts kommt ausser einem Glied dieser Potenz als niedrigstes Glied nur $c_2 h_1^{m_2+1} \lambda^{a_1 m_2}$ vor. Die Gleichsetzung ergiebt eine Bestimmungsgleichung für m_2 und c_2

$$c_2 h_1^{m_2+1} \lambda^{a_1 m_2} + k_1 m_1 h_2 \lambda^{\rho_2} = k_2 h_1 \lambda^{\rho_2}.$$

Hieraus

$$m_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 - \Delta}, \quad c_2 = \frac{k_2 h_1 - k_1 m_1 h_2}{h_1^{m_2+1}}.$$

Wenn $2\rho_2 - \rho_1 < \rho_3$ ist, so ist $2\rho_2 - \rho_1$ die niedrigste der übrigen Potenzen von λ in der Entwickelung der rechten Seite, und man hat

$$m_3 = \frac{2\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 - \Delta}, \quad c_3 = - \frac{c_2 m_2 h_2 h_1^{m_2+1} + k_1 m_1 (m_1 - 1) h_2^2}{h_1^{m_3+2}};$$

und allgemein, wenn $(n-1)\,\rho_2 - (n-2)\,\rho_1 < \rho_3$ ist, so ist für $n = 3, 4, \ldots, n$

$$m_n = \frac{(n-1)\rho_2 - (n-2)\rho_1}{\rho_1 - \Delta}$$

$$c_n = - \frac{c_{n-1} m_{n-1} h_2 h_1^{m_{n-1}+1} + c_{n-2} m_{n-2} (m_{n-2} - 1)\, h_2^2 h_1^{m_{n-2}}}{h_1^{m_n+2}}$$

Dagegen erhält man für

$$(n-1)\rho_2 - (n-2)\rho_1 > \rho_3 > (n-2)\rho_2 - (n-3)\rho_1$$

$$m_n = \frac{\rho_n}{\rho_1 - \Delta}, \quad c_n = \frac{k_3 h_1 - k_1 m_1 h_3}{h_1^{m_2+1}}.$$

In dieser Weise findet man eine beliebige Anzahl von Gliedern der v-Entwickelung.

Alle Exponenten m in der Entwickelung rechts sind, wie ersichtlich, entweder von der Form

$$\frac{\rho_i}{\rho_1 - \Delta} \quad (i = 1, 2, \ldots.)$$

oder von der Form

$$\frac{l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2 + \ldots + l_m \rho_m}{\rho_1 - \Delta},$$

wo die l gewisse ganze Zahlen sind, und wo

$$\rho_m < l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2 + \ldots + l_m \rho_m < \rho_{m+1} \quad \text{ist.}$$

Obwohl die späteren Koefficienten der v-Entwickelung kompliziert sind und schwer zu berechnen, sind die Exponenten einfach und leicht zu bestimmen. In der Analysis der Singularität haben wir es nur mit den Exponenten — und zwar den kritischen Exponenten — zu thun, wie wir später sehen werden.

§ 5. Die kritischen Exponenten der v-Entwickelung.

Es sollen jetzt die folgenden Behauptungen bewiesen werden:

(a) Wenn $\frac{\rho_r}{\Delta}$ ein kritischer Exponent der y-Entwickelung ist, dann ist $\frac{\rho_r}{\rho_1 - \Delta}$ ein kritischer Exponent der v-Entwickelung.

(b) Wenn $\frac{\rho_r}{\Delta}$ nicht ein kritischer Exponent der y-Entwickelung ist, dann ist $\frac{\rho_r}{\rho_1 - \Delta}$ nicht ein kritischer Exponent der v-Entwickelung.

(c) Ein Exponent der v-Entwickelung von der Form

$$\frac{l_1\rho_1 + l_2\rho_2 + \ldots + l_m\rho_m}{\rho_1 - \Delta}$$

ist kein kritischer Exponent.

(d) Der Koefficient irgend welchen Glieds der v-Entwickelung, das einen kritischen Exponent besitzt, ist stets von Null verschieden.

Beweis von (a). Seien die kritischen Exponenten der y-Entwickelung in ihrer einfachsten Form die folgenden:

$$\text{(A)} \qquad \frac{p_1}{cq_1}, \frac{p_2}{cM_1q_2}, \frac{p_3}{cM_2q_3}, \ldots\ldots, \frac{p_n}{cM_{n-1}q_n},$$

wo die q ganze positive teilerfremde Zahlen sind, und wo jedes M entweder gleich Eins oder gleich dem Produkt von beliebigen der vorgehenden q ist, und c das Produkt von allen gemeinschaftlichen Faktoren der Nenner ist.

Diese Exponenten auf ihren kleinsten gemeinschaftlichen Nenner gebracht sind die folgenden:

$$\text{(B)} \quad \frac{p_1 V q_2 \ldots q_n}{cVq_1q_2\ldots q_n}, \frac{p_2 \overset{V}{M_1} q_1q_3\ldots q_n}{cVq_1q_2\ldots q_n}, \ldots\ldots, \frac{p_n \overset{V}{M_{n-1}} q_1q_2\ldots q_{n-1}}{cVq_1q_2\ldots q_n},$$

wo V das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der M ist.

Dann sind

$$\text{(C)} \quad \frac{p_1 V q_2\ldots q_n}{Vq_2q_3\ldots q_n(p_1 - cq_1)}, \frac{p_2 \overset{V}{M_1} q_1q_3\ldots q_n}{Vq_2q_3\ldots q_n(p_1-cq_1)}, \ldots, \frac{p_n \overset{V}{M_{n-1}} q_1q_2\ldots q_{n-1}}{Vq_2q_3\ldots q_n(p_1-cq_1)}$$

Exponenten von der Form $\frac{\rho_r}{\rho_1 - \Delta}$. Sie gehören daher zu der v-Entwickelung. Auf ihre einfachste Form gebracht sind sie die folgenden:

$$\text{(D)} \qquad \frac{p_1}{(p_1 - cq_1)}, \frac{p_2q_1}{M_1q_2(p_1-cq_1)}, \ldots\ldots, \frac{p_nq_1}{M_{n-1}q_n(p_1-cq_1)}$$

Diese letzten sind offenbar kritische Exponenten, weil der Nenner eines jeden einen neuen Faktor q enthält. Dadurch ist (a) bewiesen.

Beweis von (b). Wir lassen die Annahme fallen, dass alle die q von (A) zu einander prim sind. Dagegen setzen wir voraus, dass ein besonderes q — etwa q_r — einem früheren q gleich ist. Dann ist der Exponent

$$\text{(E)} \qquad \frac{p_rq_1}{M_{r-1}q_r(p_1 - cq_1)}$$

der v-Entwickelung nicht ein kritischer, weil der Nenner desselben keinen neuen Faktor enthält. Also ist (b) bewiesen.

Beweis von (c). Wir machen die Annahme, dass die ersten m Glieder von (A) die ersten m Exponenten der y-Entwickelung sind. Demgemäss müssen wir voraussetzen, dass nicht alle q zu einander prim sind.

Dann hat man aus (C)

$$(F)\quad \frac{l_1p_1q_2q_3..q_mM_1..M_{m-1}+l_2p_2q_1q_3..q_mM_2..M_{m-1}+..+l_mp_mq_1q_2..q_mM_1..M_{m-2}}{q_2q_3..q_m(p_1-cq_1)}$$

Also ist der Exponent der v-Entwickelung von der Form

$$\frac{l_1\rho_1+l_2\rho_2+....+l_m\rho_m}{\rho_1-\Delta},$$

wo jedoch, wenn ein q des Nenners desselben einem früheren gleich ist, dieses q aus Nenner und Zähler durch Division entfernt werden kann. Man sieht, dass der Nenner von (F) kein späteres q als q_m enthält; und

$$\frac{l_1\rho_1+l_2\rho_2+...+l_m\rho_m}{\rho_1-\Delta}$$

ist, wie früher gesagt (S. 14), ein Exponent der v-Entwickelung, wenn

$$\frac{l_1\rho_1+l_2\rho_2+...+l_m\rho_m}{\rho_1-\Delta}>\frac{\rho_m}{\rho_1-\Delta}.$$

Also enthält der Nenner von (F) keinen neuen Faktor. Daher ist (F) kein kritischer Exponent der v-Entwickelung. Hierdurch ist (C) bewiesen.

Beweis von (d). Weil

$$\frac{l_1\rho_1+l_2\rho_2+..+l_m\rho_m}{\rho_1-\Delta}$$

kein kritischer Exponent sein kann, so kann, wenn $\frac{\rho_m}{\rho_1-\Delta}$ ein kritischer Exponent ist, die Gleichung

$$l_1\rho_1+l_2\rho_2+...+l_m\rho_m=\rho_m$$

nicht bestehen. Aber wenn diese Gleichung nicht besteht, so ist

$$\frac{k_mh_1-k_1m_1h_m}{h_1^{m_n+1}}$$

der Koefficient des Glieds der v-Entwickelung, welches den Exponenten $\frac{\rho_m}{\rho_1-\Delta}$ besitzt. Durch Substitution der Werte von m, h, k in den Zähler dieses Koefficienten findet man

$$\Delta=0$$

als die notwendige Bedingung seines Verschwindens. Aber diese ist eine unerfüllbare Bedingung. Also ist (d) bewiesen.

Wenn man (a), (b), (c), (d) zusammen betrachtet, so schliesst man Folgendes: Für jeden kritischen Exponenten der y-Entwickelung giebt es stets einen und nur einen kritischen Exponenten der v-Entwickelung.

Beispiel: Aus der y-Entwickelung

$$y = \alpha_1 x^{\frac{3}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{5}{3}} + \alpha_3 x^{\frac{7}{4}} + \alpha_4 x^{\frac{13}{6}} + \ldots$$

hat man die v-Entwickelung

$$v = c_1 u^3 + c_2 u^{\frac{10}{3}} + c_3 u^{\frac{7}{2}} + \ldots$$

Die kritischen Exponenten der y-Entwickelung sind $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$; die der v-Entwickelung sind 3, $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{2}$.

§ 6. Die Doppeltangenten-Aequivalenzzahl der Singularität.

Man erhält die Gesamtzahl von Doppeltangenten der Singularität, indem man die Anzahl von Tangenten, welche jeder Zweig von (3) § 1 mit sich selbst gemeinschaftlich besitzt, und die Anzahl, die jeder von diesen Zweigen mit jedem anderen gemeinschaftlich besitzt, für den Nullpunkt berechnet, und die so erhaltenen Zahlen addiert. Die Summe, die man in dieser Weise bekommt, ist gleich der Summe der Doppeltangenten und Wendepunkte, welche die Singularität absorbiert hat.

Ist J die Zahl, welche diese Summe angiebt, und ist τ die Doppeltangenten-Aequivalenzzahl der Singularität, so hat man

$$2\tau = 2J - 3\sum_i (\rho_1^{(i)} - \Delta_i - 1) \text{ (vergl. mit § 3).}$$

Aus der v-Entwickelung, die aus (a) § 3 gebildet werden kann, gewinnt man eine Gleichung, welche die Anzahl τ_1 der Tangenten angiebt, die der superlineare Zweig (a) gemeinschaftlich mit sich selbst besitzt, in derselben Weise wie (5) § 3 aus (a) erhalten wurde. Diese Gleichung ist

$$(5') \qquad 2\tau_1 = (\gamma - 3)(\Delta_0 - \Delta_1) + (\gamma_1 - 3)(\Delta_1 - \Delta_2) + \ldots,$$

welche aus (5) durch Ersetzung von δ_1 durch τ_1, und von Δ durch $\Delta_0 = \rho_1 - \Delta$ zu erhalten ist.

Beispiel. Der früher betrachtete Zweig (§ 3)

$$y = \alpha_1 x^{\frac{3}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{5}{3}} + \alpha_3 x^{\frac{7}{4}} + \alpha_4 x^{\frac{13}{6}} + \ldots$$

hat $\dfrac{15(6-6) + 17(6-2) + 18(2-1)}{2} = 43$ Tangenten gemein-

schaftlich mit sich selbst, ausserdem 5 Wendepunkte.

Um die Anzahl τ_2 der simultanen Tangenten von zwei Zweigen (b) § 3 zu finden, deren Entwickelungen für eine Anzahl von Anfangsgliedern mit einander übereinstimmen, ist es bequem diejenigen Glieder — mit unbestimmten Koefficienten — der v-Entwickelungen aufzustellen, welche den Gliedern von (b) § 3 mit kritischen Exponenten und dem Glied mit dem Exponenten h (b) § 3 entsprechen. Auf diese Entwickelung kann man (6) direkt anwenden, um τ_2 zu finden.

Beispiel. Man soll die Anzahl von simultanen Tangenten der zwei Zweige

$$\begin{cases} y_1 = 2x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{13}{6}} + \dots \\ y_2 = 2x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{9}{4}} + \dots \end{cases}$$

finden. Die nötigen Glieder der v-Entwickelung sind

$$\begin{cases} v_1 = c_1 u^{\frac{9}{3}} + c_2 u^{\frac{10}{3}} + c_3 u^{\frac{13}{3}} + \dots \\ v_2 = c_1 u^{\frac{18}{6}} + c_2 u^{\frac{20}{6}} + \dots\dots\dots \end{cases}$$

Man wendet (6) direkt an. $h = \frac{13}{3}$, $\Delta = 3$, $\Delta' = 6$, $d = 3$, $d_1 = 3$, $d_2 = 1$. Also

$$\tau_2 = \frac{13 \cdot 3 \cdot 6}{3 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 6}{3^2}\left[9\,(3-3) + 10\,(3-1)\right] = 66.$$

Die Anzahl τ_3 der simultanen Tangenten von zwei Zweigen (d) § 3, deren Entwickelungen kein gemeinschaftliches Anfangsglied besitzen, ist

(7′) $$\tau_3 = \rho'_1\,(\rho_1 - \Delta),$$

vorausgesetzt, dass $\frac{\rho_1}{\Delta} \leq \frac{\rho'_1}{\Delta'}$, wie man sieht, wenn man die Anfangsglieder der v-Entwickelungen von (d) § 3 aufstellt und dann (7) anwendet.

Ist $\Sigma\tau_1$ die Summe der Zahlen τ, berechnet für alle superlinearen Zweige von (3) § 1, $\Sigma\tau_2$ die Summe der Zahlen τ berechnet für alle Paare von Zweigen von (3), deren Entwickelungen gemeinschaftliche Glieder besitzen, $\Sigma\tau_3$ die Summe der Zahlen τ berechnet für alle Paare von Zweigen von (3) § 1, deren Entwickelungen kein gemeinschaftliches Anfangsglied besitzen, so hat man

(II′.) $$\tau = \Sigma\tau_1 + \Sigma\tau_2 + \Sigma\tau_3$$

als die Doppeltangenten-Aequivalenzzahl der Singularität.

Die vier Aequivalenzzahlen

$$\left\{\begin{array}{ll} r, \text{ (I.) } \S\ 2; & \delta, \text{ (II.) } \S\ 3 \\ w, \text{ (I'.) } \S\ 2; & \tau, \text{ (II'.) } \S\ 6 \end{array}\right\}$$

geben die vollständige Analysis der zusammengesetzten Nullpunktssingularität der gegebenen Kurve (1).

Bricht man die Reihenentwickelung (2) hinter dem letzten kritischen Exponenten ab, so erhält man statt des gegebenen Kurvenzweigs eine rationale Kurve mit einem superlinearen Zweig, der nach dem Vorhergehenden in die Plücker'schen Formeln mit den gleichen Aequivalenzzahlen wie der Kurvenzweig eingeht.

Man kann die Smith'schen Formeln für jeden Zweig folgendermassen ausschreiben [1]):

(a) $$\delta = \frac{r}{2}(r + w - 1) + \frac{\vartheta}{2}$$

(b) $$\tau = \frac{w}{2}(w + r - 1) + \frac{\vartheta}{2}.$$

Hat man also δ nach der vorgehenden Methode gefunden, so kann man ϑ nach (a) bestimmen, weil r und w stets bekannt sind; hat man ϑ gefunden, so kann man τ nach (b) bestimmen. In dieser Weise findet man τ, ohne die v-Entwickelung herzustellen.

Beispiel: Wir haben gefunden (§ 3), dass für den superlinearen Zweig

$$y = \alpha_1 x^{\frac{3}{2}} + \alpha_2 x^{\frac{5}{3}} + \alpha_3 x^{\frac{7}{4}} + \alpha_4 x^{\frac{13}{6}} + \ldots .$$

$\delta = 88$ ist. Also, weil $r = 11$ und $w = 5$, hat man aus der Gleichung (a) $\vartheta = 11$, und also aus (b) $\tau = 43$.

Diese Zahl für τ stimmt mit derjenigen überein, welche man mit Hilfe von (5') § 6 findet. Man hat

$$v = c_1 u^{\frac{18}{6}} + c_2 u^{\frac{20}{6}} + c_3 u^{\frac{21}{6}} + \ldots ,$$

und hieraus durch Anwendung von (5')

$$\tau = \frac{(18-3)(6-6) + (20-3)(6-2) + (2-3)(2-1)}{2}$$

$$= 43.$$

§ 7. Die Näherungskurve der gegebenen Kurve in der Singularität.

Man kann die rationalen Partial-Kurven, die nach § 1 einzelne

1) Math. Ann. Bd. XVI, S. 397.

superlineare Zweige darstellen, welche sich in einer Singularität treffen, zu einer einzigen rationalen Kurve vereinigen. Dies geschieht durch Zusammensetzung der Zweige (3) § 1 zur folgenden Näherungskurve:

$$(8)\quad \begin{cases} x = \Pi(\lambda - h_i)^{\Delta_i} \\ y = \Pi\left[\beta_1^{(i)} a_i^{\rho_1^{(i)}} (\lambda - h_i)^{\rho_1^{(i)}} + \beta_2^{(i)} a_i^{\rho_2^{(i)}} (\lambda - h_i)^{\rho_2^{(i)}} + \ldots\right](p_0 + p_1\lambda + \ldots + p_{k-1}\lambda^{k-1}) \\ \quad = \Pi(\lambda - h_i)^{\rho_1^{(i)}}\left[\beta_1^{(i)} a_i^{\rho_1^{(i)}} + \beta_2^{(i)} a_i^{\rho_2^{(i)}} (\lambda - h_i)^{\rho_2^{(i)} - \rho_1^{(i)}} + \ldots\right](p_0 + p_1\lambda + \ldots + p_{k-1}\lambda^{k-1}) \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

wo das Produktzeichen Π sich auf die verschiedenen superlinearen Zweige erstreckt, die zu vereinigen sind, ferner $\beta_1^{(i)} : \beta_2^{(i)} : \ldots = \alpha_1^{(i)} : \alpha_2^{(i)} : \ldots$, und wo die a so zu bestimmen sind, dass Uebereinstimmung zwischen (8) und jedem Zweig von (3) § 1 in Bezug auf x im Nullpunkt vorhanden ist.

Um diese Uebereinstimmung zu gewinnen, setze man $\lambda = h_i + \varepsilon$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; ε eine sehr kleine Grösse) in die Gleichung für x in (8) und in die Gleichung für x in (3) § 1 ein. Durch Vergleichung der Koefficienten von ε^{Δ_i} in den so gefundenen Werten von x erhält man

$$(a)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = (h_1 - h_2)^{\rho_1^{\frac{\Delta_2}{}}} (h_1 - h_3)^{\rho_1^{\frac{\Delta_3}{}}} \ldots (h_1 - h_k)^{\rho_1^{\frac{\Delta_k}{}}} \\ a_2 = (h_2 - h_1)^{\rho_2^{\frac{\Delta_1}{}}} (h_2 - h_3)^{\rho_2^{\frac{\Delta_3}{}}} \ldots (h_2 - h_k)^{\rho_2^{\frac{\Delta_k}{}}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k = (h_k - h_1)^{\rho_k^{\frac{\Delta_1}{}}} (h_k - h_2)^{\rho_k^{\frac{\Delta_2}{}}} \ldots (h_k - h_{k-1})^{\rho_k^{\frac{\Delta_{k-1}}{}}} \end{array} \right\},$$

wo die h beliebige — hinsichtlich der a bequem zu wählende — von einander verschiedene Konstanten sind.

Der Ausdruck für y in (8) muss, je für andere Parameterwerte gebildet, mit k verschiedenen Ausdrücken für y in (3) § 1 übereinstimmen. Um diese Uebereinstimmung zu ermöglichen, sind k unbestimmte Koefficienten p in (8) zur Verfügung. Man setze $\lambda = h_i + \varepsilon$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; ε klein) in die Gleichung für y in (8) und in die Gleichung für y in (3) ein. Durch Vergleichung der Koefficienten von $\beta_1^{(i)} a_i^{\rho_1^{(i)}} \varepsilon^{\rho_1^{(i)}} + \beta_2^{(i)} a_i^{\rho_2^{(i)}} \varepsilon^{\rho_2^{(i)}} + \ldots$ erhält man die folgenden Bestimmungsgleichungen für die p:

$$(b)\left\{\begin{array}{l}\prod_{i=2}^{i=k}\left[B_1(h_1-h_i)^{\rho_1^{(i)}}+B_2(h_1-h_i)^{\rho_2^{(i)}}+\ldots\right](p_0+p_1h_1+\ldots+p_{k-1}h_1^{k-1})=r\\ \prod_{i\leqq 2}^{i=k}\left[B_1(h_2-h_i)^{\rho_1^{(i)}}+B_2(h_2-h_i)^{\rho_2^{(i)}}+\ldots\right](p_0+p_1h_2+\ldots+p_{k-1}h_2^{k-1})=r\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \prod_{i=1}^{i=k-1}\left[B_1(h_k-h_i)^{\rho_1^{(i)}}+B_2(h_k-h_i)^{\rho_2^{(i)}}+\ldots\right](p_0+p_1h_k+\ldots+p_{k-1}h_k^{k-1})=r\end{array}\right\},$$

wo $B_j=\beta_j^{(i)}a_i^{\rho_j^{(i)}}$ und $r=\dfrac{\beta_1^{(i)}}{\alpha_1^{(i)}}=\dfrac{\beta_2^{(i)}}{\alpha_2^{(i)}},=\ldots\ldots$

Weil alle die h von einander verschieden sind, so ist die Determinante

$$\left|\begin{array}{c}1,\ h_1,\ h_1^2,\ \ldots,\ h_1^{k-1}\\ 1,\ h_2,\ h_2^2,\ \ldots,\ h_2^{k-1}\\ \ldots\ldots\ldots\\ 1,\ h_k,\ h_k^2,\ \ldots,\ h_k^{k-1}\end{array}\right|=c\Pi(h_k-h_l)\qquad\left(\begin{array}{l}k\leqq l\\ c\text{ eine Potenz von }-1\end{array}\right)$$

stets von Null verschieden. Daher sind die p aus (b) stets eindeutig bestimmbar.

Man bekommt ferner die parametrische Darstellung der Linienkoordinaten der Näherungskurve, indem man aus (8)

$$(8')\qquad\left\{\begin{array}{l}u=u(\lambda)\equiv\dfrac{\dfrac{dy}{d\lambda}}{\dfrac{dx}{d\lambda}}\\ v=v(\lambda)\equiv wx-y\end{array}\right\}$$

bildet.

Durch (8) sind x und y als ganze rationale Funktionen von λ dargestellt; dagegen werden durch (8') sich für u und v im allgemeinen gebrochene Funktionen von λ ergeben.

Beispiel. Die Kurve $y^4-x^7y-x^2y^3+x^9-x^7y^2=0$ hat im Nullpunkt die Entwickelungen

$$\left\{\begin{array}{l}y=x^{\frac{7}{3}}+\ldots\\ y=x^2+\ldots\end{array}\right\}$$

Die parametrische Darstellung der zwei Zweige liefert

$$\left\{\begin{array}{l}x=-\lambda^3\\ y=-\lambda^7+\ldots\end{array}\right\},\quad\left\{\begin{array}{l}x=(\lambda-1)\\ y=(\lambda-1)^2+\ldots\end{array}\right\}.$$

Die Näherungskurve ist

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = \lambda^3(\lambda-1) \\ y = \lambda^7(\lambda-1)^2(-1+2\lambda) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{\lambda^4(\lambda-1)(7-25\lambda-20\lambda^2}{4\lambda-3} \\ v = \dfrac{\lambda^7(\lambda-1)^2(4-15\lambda+12\lambda^2)}{4\lambda-3} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Die Ordnung der Näherungskurve ist 10, die Klasse ist 10. Diese Kurve hat im Nullpunkt 2 Spitzen, $(4+6)$ Doppelpunkte, 3 Wendepunkte, $(6+7)$ Doppeltangenten.

§ 8. Die rational-ganze Näherungskurve.

Wenn die Näherungskurve (8) § 7 so modificiert wird, dass auch u und v ganze Funktionen von λ werden, so wird die Näherungskurve von Professor Brill eine „rational-ganze" Kurve genannt. Die nötige Modifikation geschieht durch passende Bestimmung einer gewissen Anzahl von weiterhin noch zugefügten p in der Gleichung für y in (8).

Wir betrachten

$$(8'') \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \varphi(\lambda) \\ y = \psi(\lambda)\vartheta(\lambda) \end{array}\right.,$$

$$(\vartheta \equiv p_0 = p_1\lambda + p_2\lambda^2 + \ldots + p_r\lambda^r)$$

als die modificierte Form von (8) und fragen, wie man die p zu bestimmen hat und von welchem Grad ϑ in λ sein muss, um (8) zu einer rational-ganzen Näherungskurve zu machen.

Durch Differenentiation nach λ bekommt man aus der Gleichung für y in (8'')

$$(a) \qquad y' = \psi'\vartheta + \psi\vartheta' = x'u = x'(q_0 + q_1\lambda + \ldots + q_s\lambda^s),$$

wo $y' \equiv \dfrac{dy}{d\lambda}$, $x' \equiv \dfrac{dx}{d\lambda}$, und wo $u \equiv q_0 + q_1\lambda + \ldots + q_s\lambda^s$ eine Linienkoordinate ist. Die q sind später zu bestimmen. r ist so gross gewählt, dass (8'') eine rational-ganze Kurve sein kann und s so, dass der Grad von $x'u$ eben so hoch ist, wie der Grad von y'.

Haben φ und ψ ein Produkt Πf^n von linearen Faktoren f gemeinschaftlich, wo n bedeutet, wie oft f als Faktor vorkommt, so hat man

$$(b) \qquad y'_1 = \psi'_1\vartheta + \psi_1\vartheta' = x'_1 u,$$

wo $y'_1 \equiv \dfrac{y'}{\Pi f^{n-1}}$, $\psi'_1 = \dfrac{\psi'}{\Pi f^{n-1}}$, $\psi_1 = \dfrac{\psi}{\Pi f^{n-1}}$, $x'_1 = \dfrac{x'}{\Pi f^{n-1}}$.

Man denkt sich nun die Multiplikation in (b) ausgeführt und die beiden Seiten der Gleichung nach Potenzen von λ geordnet.

Weil (b) identisch sein muss, so bekommt man durch Vergleichung der Koefficienten von gleichen Potenzen von λ eine Anzahl von Gleichungen linear in p und q, aus welchen die p und die q sich bestimmen lassen. Man bekommt n andere lineare Bestimmungsgleichungen für p und q aus der Bedingung, dass die Gleichung für y in (8″) mit den n Gleichungen für y in (3) § 1 in Uebereinstimmung gebracht werden müssen.

Ist d die Differenz zwischen der höchsten Potenz und der niedrigsten Potenz von λ in φ'_1, und ist n die Anzahl der Zweige in (3) § 1, so hat man

$$d+1+s+n$$

als die Anzahl der Bestimmungsgleichungen für p und q, und

$$r+s+2$$

als die Anzahl der p und q. r und s ist nun so gross zu wählen, dass die Anzahl der Bestimmungsgleichungen und die Anzahl der p und q einander gleich sind. Man hat somit, wenn die Determinante der linearen Gleichungen nicht Null ist,

$$r+s+2=d+1+s+n.$$

Hieraus folgt

$$r=d+n-1.$$

Also ist der Grad des ergänzenden Faktors ϑ gleich der Differenz zwischen dem Grad der höchsten Potenz und dem Grad der niedrigsten Potenz von λ in φ', vermehrt um die Anzahl der Zweige der Singularität weniger Eins.

Dies gilt nur dann, wenn die Determinante der Koefficienten der Bestimmungsgleichungen von Null verschieden ist, was nicht immer der Fall ist. Wenn sie Null ist, so muss man eine grössere Anzahl von Gliedern in ϑ wählen, in welchen alsdann einige der p noch beliebig zu wählen sind, mit der Ausnahme, dass p_0 ganz bestimmt ist und das letzte p nicht gleich Null gesetzt werden darf. Durch Bestimmung von ϑ ist auch u bestimmt. v ist als $ux-y$ zu bilden. Der Grad von v ist stets höher als der Grad von u, ebenso wie der Grad von y höher als der Grad von x ist. Der Grad von v ist stets gleich dem Grad von y, d. h. die Klasse der Näherungskurve ist gleich der Ordnung derselben.

Beispiel. Man soll eine rational-ganze Näherungskurve zu der in § 7 gegebenen Kurve bilden.

Hat man

$$\left\{\begin{array}{l} x = \lambda^3(\lambda - 1) \\ y = \lambda^7(\lambda - 1)^2(p_0 + p_1\lambda + p_2\lambda^2) \end{array}\right\},$$

so bestimmen sich die p, wie folgt:

$$\frac{y'}{\lambda^2} = -7\lambda^2 + (16 + 8p_1)\lambda^5 + (-9 - 18p_1 + 9p_2)\lambda^6 + (10p_1 - 20p_2)\lambda^7 + 11p_2\lambda^8$$

$$= \frac{x'}{\lambda^2}u = (4\lambda - 3)(q_5\lambda^4 + q_6\lambda^5 + q_7\lambda^6 + q_8\lambda^7)$$

$$= -3q_5\lambda^4 + (4q_5 - 3q_6)\lambda^5 + (4q_6 - 3q_7)\lambda^6 + (4q_7 - 3q_8)\lambda^7 + 4q_8\lambda^8$$

Man hat also für p und q die Bestimmungsgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} p_0 = -1 \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 3q_5 &= 7 \\ 4q_5 - 3q_6 &= 16 + 8p_1 \\ 4q_6 - 3q_7 &= -9 - 18p_1 + 9p_2 \\ 4q_7 - 3q_8 &= 10p_1 - 20p_2 \\ 4q_8 &= 11p_2 \end{array}\right\}.$$

Hieraus $p_0 = -1$, $p_1 = \frac{38}{3}$, $p_2 = -\frac{32}{3}$, $q_5 = \frac{7}{3}$,
$q_6 = -36$, $q_7 = 63$, $q_8 = -\frac{88}{3}$.

Also ist die gesuchte Näherungskurve

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = \lambda^3(\lambda - 1) \\ y = \lambda^7(\lambda - 1)^2(-\frac{32}{3}\lambda^2 + \frac{38}{3}\lambda - 1) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} u = \lambda^4(\lambda - 1)\ (-\frac{88}{3}\lambda^2 + \frac{101}{3}\lambda - \frac{7}{3}) \\ v = \lambda^7(\lambda - 1)^2(-\frac{56}{3}\lambda^2 + 21\lambda - \frac{4}{3}) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

§ 9. Deformation der rationalen Näherungskurve.

Weil, wie wir gesehen haben, eine gegebene höhere Singularität als aus einer bestimmten Anzahl elementarer Singularitäten von bestimmter Art bestehend gedacht werden kann, so liegt die Frage nahe: Ist es stets möglich, durch Zufügen gewisser mit einem verschwindend kleinen Faktor ε multiplizierten Glieder zu den Parameter-Ausdrücken für die Koordinaten der Kurve C, welche Träger dieser Singularität ist, eine neue Kurve (C_ε) zu konstruieren, welche anstatt der höheren Singularität die betreffenden elementaren Singularitäten — sehr wenig auseinander liegend — trägt, welche ferner von derselben Ordnung (n) ist, wie C, und welche, wenn man die deformierende Grösse ε gleich Null setzt, sich auf C reduziert?

Ist C_ε konstruiert und wird ε kleiner und kleiner gemacht, so nähert sich C_ε die Kurve C, bis, wenn ε unendlich klein wird, C_ε sich von C unendlich wenig unterscheidet. Dann liegen die betreffenden elementaren Singularitäten einander unendlich nahe und bilden eine „penultimate Form" der gegebenen Singularität. Durch eine solche Deformation ist die Klasse der Kurve C nicht geändert, weil die Ordnung der Kurve, die Anzahl ihrer Doppelpunkte und die Anzahl ihrer Spitzen ungeändert bleiben. Auch bleibt das Geschlecht Null, weil dies bei Kurven, welche durch einen Parameter rational darstellbar sind, stets der Fall ist.

Ist eine solche Kurve C_ε stets möglich, so hat man in dieser Thatsache eine weitere Rechtfertigung der Ansicht von Cayley, dass eine höhere Singularität einer gewissen Anzahl von elementaren Singularitäten von bestimmter Art äquivalent ist.

Um die Kurve C_ε zu bilden, wählen wir (8) als die Definitionsgleichung für die Kurve C. Aus (8') wird u gebildet. Durch Differentiation erhält man

$$\text{(a)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = \Pi(\lambda - h_i)^{\Delta_i - 1} \quad f(\lambda) \\ u' = \Pi(\lambda - h_i)^{\rho_i - \Delta_i - 1} g(\lambda) \end{array} \right\},$$

wo $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ ganze rationale Funktionen von λ sind, deren Linearfaktoren nicht in x und y erhalten sind.

Wir bilden nun die folgende variierte Form von (a):

$$\text{(a')} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = \Pi\left[(\lambda - h_i)^{\Delta_i - 1} + a_i\varepsilon\right] f(\lambda) \\ u'_1 = \Pi\left[(\lambda - h_i)^{\rho_i - \Delta_i - 1} + b_i\varepsilon\right] g(\lambda) \end{array} \right\},$$

wo ε eine beliebig kleine konstante Grösse ist, die a und b ganze Funktionen von λ vom Grad $\Delta_i - 1$, bez. $\rho_i - \Delta_i - 1$, sind. Wählt man sie insbesondere als Konstanten, so muss a_r von a_s verschieden sein, wenn $\Delta_r = \Delta_s$, a_t von b_u verschieden, wenn $\Delta_t = \rho_u - \Delta_u$, und b_v von b_w verschieden, wenn $\rho_v - \Delta_v = \rho_w - \Delta_w$. Es ist zu bemerken, dass bei dieser Wahl der Wert von λ für einige der Spitzen und Wendepunkte der Kurve C_ε, die durch die Deformation aus der Singularität hervorgehen, imaginär wird.

Aus (a') folgt durch Integration

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1(\lambda, \varepsilon) = \int_0^\lambda x'_1(\lambda, \varepsilon) d\lambda \\ u_1 = u_1(\lambda, \varepsilon) = \int_0^\lambda u'_1(\lambda, \varepsilon) d\lambda \end{array}\right\}.$$

Sind x_1 und u_1 gegeben, so bestimmt man $y_1 = y_1(\lambda, \varepsilon)$ und $v_1 = v_1(\lambda, \varepsilon)$ aus einer der zwei Relationen $y'_1 = u_1 x'_1$, $v'_1 = x_1 u'_1$ und der Relation $v = ux - y$. Hat man x_1, y_1, u_1, v_1 in dieser Weise bestimmt, so ist

$$(8'') \qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{I.} & \left\{\begin{array}{l} x_1 = x_1(\lambda, \varepsilon) \\ y_1 = y_1(\lambda, \varepsilon) \end{array}\right\} \\ \text{II.} & \left\{\begin{array}{l} u_1 = u_1(\lambda, \varepsilon) \\ v_1 = v_1(\lambda, \varepsilon) \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

diejenige Kurve C_ε, welche die deformierte Form der Kurve C (8') ist.

C_ε besitzt in der Nähe des Nullpunktes eine Anzahl von Spitzen, Doppelpunkten, Wendepunkten und Doppeltangenten, die durch die früher erklärten Aequivalenzzahlen bezeichnet sind. Vermöge der Art der Deformation, die durch (a') definiert wird, weiss man, dass alle diese Spitzen und Wendepunkte von einander getrennt liegen. Ob dagegen alle Doppelpunkte und Doppeltangenten von C_ε von einander und von den anderen elementaren Singularitäten g e t r e n n t s i n d, oder nicht, kann man nicht direkt aus der Art der Deformation erkennen. Diese Frage kann in jedem besonderen Fall nur durch Bestimmung der Lage dieser Doppelpunkte und Doppeltangenten entschieden werden. Wie man diese Lage finden kann, wird später (§ 13) gezeigt werden.

Wenn kein Wendepunkt im Nullpunkt vorhanden ist, so genügt es, x' allein zu deformieren. In diesem Fall kann man mit der rational gebrochenen Näherungskurve (8) § 7 operieren. Wenn dagegen Wendepunkte vorhanden sind, muss man auch u' deformieren, und dann darf u'_1 keine gebrochene Funktion sein, weil man in diesem Fall durch Integration für u_1 nicht eine algebraische Funktion von λ, sondern im allgemeinen eine transcendente Funktion bekommt. In diesem Fall muss man also die rational-ganze Näherungskurve (8') als C wählen und diese deformieren.

B e i s p i e l. Wählt man als C die rational-ganze Näherungskurve des Beispiels von § 8, so bekommt man durch Differentiation

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \lambda^2(4\lambda - 3) \\ u' = \lambda^3(-192\lambda^3 + \frac{782}{3}\lambda^2 - 180\lambda + \frac{28}{3}) \end{array}\right\}.$$

Dann bildet man C_ε aus

$$\left\{\begin{array}{l} x'_1 = (\lambda^2 - \varepsilon)(4\lambda - \varepsilon) \\ u'_1 = (\lambda^3 - \varepsilon)(-192\lambda^3 + \frac{782}{3}\lambda^2 - 180\lambda + \frac{28}{3}) \end{array}\right\}$$

Wenn man C_ε aus

$$\left\{\begin{array}{l} x'_1 = (\lambda^2 - \varepsilon^2)(4\lambda - 3) \\ u'_1 = (\lambda^3 + \Lambda\varepsilon)(-192\lambda^2 + \frac{782}{3}\lambda^2 - 180\lambda + \frac{28}{3}) \end{array}\right\}$$

bildet, wo $\Lambda = 2\lambda - \frac{\varepsilon\lambda}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}$, so sind die Spitzen und Wendepunkte von C_ε, welche durch die Deformation aus der Singularität hervorgehen, alle reell.

§ 10. Stetigkeit der Deformation der Singularitäten der Näherungskurve.

Durch Deformation der Näherungskurve erleidet nicht nur die im Ursprung gelegene Singularität die angegebene Verschiebung, sondern auch jede Singularität, welche die Kurve ausserhalb des Ursprungs besitzt, eine solche Verschiebung. Man kann zeigen, dass diese letztere eine stetige Funktion der Deformation ist; dass also insbesondere für einen unendlich kleinen Wert der deformierenden Grösse ε diejenigen elementaren Singularitäten, die durch die Deformation aus der Nullpunktssingularität hervorgehen, nicht mit solchen Singularitäten zusammenfallen können, die auf der nicht deformierten Kurve in endlichem Abstand vom Nullpunkt liegen.

Sei

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \end{array}\right\}$$

die nicht deformierte Näherungskurve, und

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = x(\lambda, \varepsilon) \\ y_1 = y(\lambda, \varepsilon) \end{array}\right\}$$

die deformierte. Dann sind

$$(a) \qquad \left\{\begin{array}{l} \xi(\lambda, \lambda_1) \equiv \dfrac{x(\lambda) - x(\lambda_1)}{\lambda - \lambda_1} = 0 \\ \eta(\lambda, \lambda_1) \equiv \dfrac{y(\lambda) - y(\lambda_1)}{\lambda - \lambda_1} = 0 \end{array}\right\}$$

die „Doppelpunktsgleichungen“ von (1), d. h. die Gleichungen, aus deren Resultante hinsichtlich λ_1 der Parameter λ für alle endlich weiten Doppelpunkte (und Spitzen) von (1) bestimmt werden; ebenso sind

$$\text{(b)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1(\lambda, \lambda_1, \varepsilon) \equiv \dfrac{x_1(\lambda, \varepsilon) - x_1(\lambda_1, \varepsilon)}{\lambda - \lambda_1} \\ \\ \eta_1(\lambda, \lambda_1, \varepsilon) \equiv \dfrac{y_1(\lambda, \varepsilon) - y_1(\lambda_1, \varepsilon)}{\lambda - \lambda_1} \end{array} \right\}$$

die Doppelpunktsgleichungen von (2).

Sei $R(\lambda) \equiv \alpha_0 \lambda^r + \alpha_1 \lambda^{r-1} + \ldots + \alpha_r$ die Resultante von ξ und η in Bezug auf λ_1. Dann ist R eine ganze rationale Funktion von λ, und $\frac{r}{2}$ ist die Anzahl der in der Endlichkeit liegenden Doppelpunkte und Spitzen von (1). Die α sind Funktionen der Koefficienten in ξ und η und sind also Konstanten.

Sei $R'(\lambda, \varepsilon) \equiv \alpha'_0 \lambda^{r'} + \alpha'_1 \lambda^{r'-1} + \ldots\ldots + \alpha'_{r'}$ die Resultante von ξ_1 und η_1 in Bezug auf λ_1. Dann ist R' eine ganze rationale Funktion von λ und ε, weil die α' rationale ganze Funktionen von ε sind. $\frac{r'}{2}$ ist die Anzahl der im Endlich gelegenen Doppelpunkte und Spitzen der deformierten Kurve (2).

Weil für $\varepsilon = 0$ $\lim R(\lambda, \varepsilon) \equiv R(\lambda)$, so ist $r' \geq r$. Aber bekanntlich[1]) sind diejenigen Wurzeln der Gleichung

$$R' = 0,$$

welche sich für $\varepsilon = 0$ auf die Wurzeln der Gleichung

$$R = 0$$

reducieren, stetige Funktionen der Koefficienten α', und weil diese Koefficienten rationale ganze Funktionen von ε sind, so sind sowohl die Parameter, die zu den Doppel- und Rückkehrpunkten gehören, also auch die Koordinaten x und y, die ganze rationale Funktionen von ε und λ sind, stetige Funktionen von ε. Also für unendlich kleine Werte von ε sind die Doppelpunkte und Spitzen der Kurve C_2, welche zu denjenigen Wurzeln der Gleichung $R' = 0$ gehören, die sich für $\varepsilon = 0$ auf Wurzeln der Gleichung $R = 0$ reduzieren, nur unendlich wenig aus dem Nullpunkt verschoben. Auch sind durch die Deformation die anderen in der Endlichkeit liegenden Singularitäten der Kurve C nur unendlich wenig verschoben.

Wenn $s \equiv r' - r > 0$ ist, dann hat

$$R' = 0$$

s Wurzeln, welche für $\varepsilon = 0$ unendlich gross werden. Diese können durch Kleinmachen von ε beliebig gross gemacht werden, also die

1) cfr. Weber, Algebra II § 44.

Singularitäten, zu welchen sie gehören, beliebig weit von dem Nullpunkt gebracht werden.

Also kann ε immer so klein gewählt werden, dass die Doppel- und Rückkehrpunkte von C_ε, welche durch die Deformation aus der gegebenen Singularität hervorgehen, nicht mit anderen Singularitäten zusammenfallen.

Man kann einen ähnlichen Schluss hinsichtlich der Doppeltangenten und Wendepunkte machen.

§ 11. Reihenentwickelung für eine Nullpunktssingularität einer algebraischen Raumkurve.

Die Auflösung einer Singularität verlangt ferner die Bestimmung der Lage derjenigen elementaren Singularitäten, welche durch Deformation der Näherungskurve aus dieser Singularität hervorgehen. Aber bevor wir uns hiermit beschäftigen, ist es nötig, ein allgemeines Verfahren auseinanderzusetzen, das dazu dient, aus zwei Gleichungen mit drei Veränderlichen, die für die Nullwerte dieser Grössen befriedigt werden, die Reihenentwickelungen herzustellen, durch die zwei von ihnen in Funktion der dritten darstellbar sind.

Gegeben seien zwei algebraische Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{r} p_e x^{a_e} y^{b_e} z^{c_e} = 0 \\ \sum_{i=1}^{s} q_i x^{d_i} y^{f_i} z^{g_i} = 0 \end{array} \right\}$$

(wo x, y, z Variabeln, die p und q Konstanten, die $a, \ldots, d, \ldots$ ganze positive Zahlen sind) die kein konstantes Glied besitzen mögen.

Man soll y und z nach positiven Potenzen vor x entwickeln, wo x als sehr klein angenommen wird.

Zu diesem Zweck nimmt man zwei Reihen von der Form an

$$\text{(b)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = \alpha x^m + \ldots . \\ z = \beta x^n + \ldots . \end{array} \right\},$$

wo nun die ganzen oder gebrochenen positiven Zahlen m und n sowie die Konstanten α und β noch zu bestimmen sind. Um dies auszuführen, substituiert man in (a) die Ausdrücke (b) und erhält

$$\text{(c)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{r} p_e \alpha^{b_e} \beta^{c_e} x^{a_e + m b_e + c_e} + \ldots . = 0 \\ \sum_{i=1}^{s} q_i \alpha^{f_i} \beta^{g_i} x^{d_i + m f_i + n g_i} + \ldots = 0 \end{array} \right\}.$$

Aus (c) bestimmt sich m und n durch die folgenden zwei Bedingungen:

1) m und n sind beide grösser als Null.

2) In jeder der Gleichungen (c) müssen zwei oder mehrere Glieder, um sich gegenseitig aufheben zu können, von gleicher Ordnung sein, und von niedrigerer Ordnung als alle anderen.

Wie die Grössen m und n herausgefunden werden, wird im folgenden § gezeigt werden. Man erhält im allgemeinen mehr als ein Wertpaar m, n, das den Bedingungen 1) und 2) genügt.

§ 12. Ein geometrisches Verfahren, nach Analogie der Newton'schen Regel.

Seien (1) $$p_i x^{h_i} y^{k_i} z^{l_i} (i = 1, 2, \ldots, t)$$

rationale ganze algebraische Funktionen von gleich hohen Dimensionen, so dass die Gleichungen

$$h_1 + mk_1 + nl_1 = h_e + mk_e + nl_e \quad (e = 2, 3, \ldots, t)$$

bestehen, wo m und n die Ordnungen von y und z hinsichtlich x sind, wie die Gleichungen

(3) $$\left\{ \begin{array}{l} y = \alpha x^m + \ldots\ldots \\ z = \beta x^n + \ldots\ldots \end{array} \right\}$$

aussagen.

Wenn man h_i, k_i, l_i als Punktkoordinaten in Bezug auf ein Cartesisches Koordinatensystem (h, k, l) ansieht, dann ist man berechtigt, das Folgende auszusagen:

(a) Alle Punkte (h_i, k_i, l_i) liegen in einer Ebene (e), die auf der Geraden

(4) $$h : k : l = 1 : m : n$$

(wir bezeichnen diese Gerade durch g) senkrecht steht, wo h, k, l die laufenden Koordinaten der Geraden in Bezug auf das gewählte Koordinatensystem (h, k, l) sind; d. h.,

(b) die orthogonale Projektion der Entfernungen (ρ_i) dieser Punkte (h_i, k_i, l_i) vom Nullpunkt auf g sind einander gleich und zwar gleich

(5) $$\frac{h_i + mk_i + nl_i}{\sqrt{1 + m^2 + n^3}}.$$

(c) Weil m und n stets positiv sind und grösser als Null, so

schneidet e die positiven Axen des Systems (h, k, l) und zwar in endlichen Entfernungen vom Nullpunkt.

(d) Alle Punkte (h, k, l), welche Dimensionen niedriger als $h_i + m k_i + n l_i$ ergeben, liegen auf der Nullpunktsseite von e, und alle Punkte (h, k, l), welche Dimensionen höher als $h_i + m k_i + n l_i$ ergeben, liegen in Bezug auf den Nullpunkt jenseits der Ebene e.

Hat man nun nach § 11 die neben einander bestehenden rationalen ganzen algebraischen Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{e=1}^{r} p_e x^{a_e} y^{b_e} z^{c_e} = 0 \\ \sum_{i=1}^{s} q_i x^{d_i} y^{f_i} z^{g_i} = 0 \end{array} \right\}$$

je ohne konstantes Glied, aus welchen man y und z nach positiven Potenzen von x entwickeln soll, so kann man das Folgende bemerken: Die Punkte (a_e, b_e, c_e), (d_i, f_i, g_i) liegen entweder in einer von den positiven Koordinatebenen des Systems (h, k, l), oder in dem körperlichen Winkel zwischen den drei positiven Koordinatenebenen, aber nicht im Nullpunkt.

Man kann nun immer zwei Ebenen e_1 und e_2 so bestimmen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(I.) e_1 und e_2 sollen die positiven Axen des Systems in endlichen Entfernungen vom Nullpunkt schneiden.

(II.) e_1 und e_2 sollen parallel sein.

(III.) e_1 soll durch zwei oder mehrere der Punkte (a_e, b_e, c_e) gehen, ebenso e_2 durch zwei oder mehrere der Punkte (d_i, f_i, g_i).

(IV.) Alle Punkte (a_e, b_e, c_e), welche nicht in e_1 liegen, sollen in Bezug auf den Nullpunkt jenseits der Ebene e_1 liegen, ebenso alle Punkte (d_i, f_i, g_i), welche nicht in e_2 liegen, jenseits der Ebene e_2 liegen.

Jedes solche Paar von Ebenen e_1 und e_2 bestimmt eine Gerade g, welche auf ihnen senkrecht steht und die Gleichung

$$h : k : l = 1 : m : n$$

hat, bestimmt also ein Wertpaar (m, n). Daher wird die ganze gesuchte Entwickelung durch die Gesamtheit der Ebenenpaare e_1 und e_2, welche den Bedingungen (I) — (IV) gleichzeitig genügen, bestimmt.

Man bemerkt die Analogie dieses Verfahrens mit der Newton'schen Regel.

Sei m_h, n_h ein Wertepaar m, n. Ihm entsprechen gewisse Werte von α und β. Diese findet man, wie folgt: Man ersetzt m und n in (c), durch m_h, n_h. Weil x als klein angesehen wird, so können in jeder von diesen zwei Gleichungen ausser den Gliedern niedrigster Ordnung alle wegfallen. Dividiert man dann jede Gleichung durch diejenige Potenz von x, welche als niedrigste geblieben ist, so hat man zur Bestimmung von α und β zwei Gleichungen von der Form

$$\text{(d)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^r p_e \alpha^{b_e} \beta^{c_e} = 0 \\ \sum_1^s q_i \alpha^{f_i} \beta^{g_i} = 0 \end{array} \right\},$$

wo sich die Summation auf die Koefficienten der Glieder niedrigster Ordnung erstreckt.

Man erhält so eine Anzahl von Entwickelungen von y und z:

$$\text{(e)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = \alpha_i x^{m_h} + \ldots\ldots \\ z = \beta_i x^{n_h} + \ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Diese Entwickelungen geben eine erste Annäherung.

Um die Entwickelungen fortzusetzen, setzt man

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \alpha_i x^{m_h} + \alpha x^m + \ldots \\ z = \beta_i x^{n_h} + \beta x^n + \ldots \end{array} \right\}.$$

Diese Ausdrücke substituiert man für y und z in (a) (§ 11) und erhält dadurch zwei Gleichungen, welche (c) analog sind. Aus diesen zwei Gleichungen bestimmt man m, n, α, β in derselben Weise, wie diese Grössen früher bestimmt wurden. In ähnlicher Weise können die Entwickelungen beliebig weit fortgesetzt werden.

Wenn im Laufe der Entwickelung von y oder z ein kritischer Exponent in der einen oder der anderen von diesen Entwickelungen auftritt, so tritt eine „Spaltung“ ein. Man hat die Operation so weit zu führen, dass kein weiterer kritischer Exponent auftreten kann.

Wenn x, y, z als Cartesische Punktkoordinaten angesehen werden, so stellen die zwei neben einander bestehenden Gleichungen (a) eine Raumkurve mit einer Singularität im Nullpunkt dar. Dann kann das Problem, y und z nach positiven Potenzen von x zu entwickeln, in das folgende verwandelt werden: Man soll das Verhalten der Raumkurve (a) im Nullpunkt finden.

Aus diesem Gesichtspunkt giebt die y-Entwickelung das Verhalten der xy-Projektion der Kurve, ebenso die z-Entwickelung das der xz-Projektion der Kurve. Durch diese beiden Entwickelungen ist das Verhalten der Kurve selbst bestimmt.

Aehnlich bestimmt sich die Entwickelung von jeder von $n-1$ Variabeln nach Potenzen einer $n$ten Variabeln, wenn $n-1$ neben einander bestehende ganze rationale algebraische Gleichungen ohne konstantes Glied zwischen den n Variabeln gegeben sind. Diese Gleichungen neben einander bestehend stellen eine Kurve in einem Raum von n Dimensionen dar, und jede von diesen $n-1$ Entwickelungen stellt eine Projektion der Kurve dar.

Würde man aus (a) zuerst z dann y eliminieren, so hätte man die Gleichungen der xy- und xz-Projektion der Kurve. Aus diesen Gleichungen könnte man die vorgehenden Entwickelungen nach der wohlbekannten Newton'schen Regel herstellen. Der Vorzug der angegebenen Methode vor dieser ist der, dass mit ihrer Hilfe die Elimination umgegangen werden kann.

1. Beispiel. Gegeben (a) $\left\{\begin{array}{l} x^3 + 2xyz - z^2 = 0 \\ y^2 - 2xz + x^3 = 0 \end{array}\right\}$.

Durch Substitution von (b) $\left\{\begin{array}{l} y = \alpha x^m + \ldots \\ z = \beta x^n + \ldots \end{array}\right\}$ in (a) erhält man

(c) $\left\{\begin{array}{l} x^3 + 2\alpha\beta x^{m+n+1} - \beta^2 x^{2n} = 0 \\ \alpha^2 x^{2m} - 2\beta x^{n+1} + x^3 = 0 \end{array}\right\}$. Hieraus hat man $m = \frac{5}{4}$, $n = \frac{3}{2}$. α und β bestimmen sich aus den zwei Gleichungen $\left\{\begin{array}{l} 1 - \beta^2 = 0 \\ \alpha^2 - 2\beta = 0 \end{array}\right\}$, woraus $\left\{\begin{array}{l} \alpha = \omega_i\sqrt{2} \\ \beta = \omega_i^2 \end{array}\right\}$, wo $\omega_i^4 = 1$. Also hat man in erster Annäherung $\left\{\begin{array}{l} y = \omega_i\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}} + \ldots. \\ z = \omega_i^2 x^{\frac{3}{2}} + \ldots. \end{array}\right\}$. Die einzelnen Zweige der Entwickelungen (so weit wie gefunden) sind

$$\left\{\begin{array}{l} y = -\sqrt{2}x^{\frac{5}{4}} + \ldots. \\ z = x^{\frac{3}{2}} + \ldots. \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{2}x^{\frac{5}{4}} + \ldots \\ z = x^{\frac{3}{2}} + \ldots \end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{-2}\,x^{\frac{5}{4}} + \ldots \\ z = -x^{\frac{3}{2}} + \ldots \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} y = -\sqrt{-2}x^{\frac{5}{4}} + \ldots \\ z = -x^{\frac{3}{2}} + \ldots \end{array}\right\},$$

2. Beispiel. Gegeben $\left\{\begin{array}{l} 3x^2y - 2yz^3 + x^2y^3z^2 + x^5 = 0 \\ 2z^3x - x^4 - y^3 + 7xy^6 = 0 \end{array}\right\}$.

Man hat für m und n die zwei Wertpaare $1, \frac{2}{3}$; $3, 1$, und die zwei entsprechenden Wertpaare von α und β sind $\omega_i \sqrt[3]{3}$, $\omega_i \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $-\frac{1}{3}$, $\omega_i \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Also hat man

$$\left\{\begin{array}{l} y = \omega_i \sqrt[3]{3}x + \ldots . \\ z = \omega_i \sqrt[3]{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}} + \ldots \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{x^3}{3} + \ldots . \\ z = \omega_i \sqrt[3]{\frac{1}{2}}x + \ldots \end{array}\right\} \quad (\omega_i{}^3 = 1).$$

§ 13. Anwendung dieses Verfahrens auf die Bestimmung des Parameters der Doppelpunkte und Doppeltangenten der deformierten Näherungskurve, welche durch Deformation aus der Nullpunktssingularität hervorgehen.

Die rationale Näherungskurve (3) § 1 der gegebenen Kurve (1) der Einleitung soll, wie in § 9, durch C bezeichnet werden, und die deformierte Form dieser Näherungskurve durch C_ε. Wie in § 10 sollen

$$\text{(a)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \xi_1(\lambda, \lambda_1, \varepsilon) = 0 \\ \eta_1(\lambda, \lambda, \varepsilon) = 0 \end{array}\right\}$$

die Doppelpunktsgleichungen und

$$\text{(b)} \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1(\lambda, \lambda_1, \varepsilon) = 0 \\ \beta_1(\lambda, \lambda_1, \varepsilon) = 0 \end{array}\right\}$$

die Doppeltangentengleichungen von C_ε darstellen.

Dann sind h_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ die Nullpunktswerte von λ für C. Aus § 10 folgt, dass die Werte von λ für diejenigen Doppelpunkte und Doppeltangenten, welche durch die Deformation aus der Singularität hervorgehen, sich nur wenig von den Werten $h_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ unterscheiden, und zwar um eine Grösse, welche für ε gleich Null verschwindet.

Die drei Grössen $\lambda^{(i)} \equiv (\lambda - h_i)$, $\lambda_1{}^{(i)} \equiv (\lambda_1 - h_i)$, ε können als Cartesische Punktkoordinaten angesehen werden. Dann ist durch (a), wie durch (b), eine Raumkurve mit einer Nullpunktssingularität dargestellt. Man verlangt, diejenigen Doppelpunkte (resp. Doppeltangenten) zu finden, welche durch die Deformation von C aus der Singularität hervorgehen.

Um die Werte von λ für die Doppelpunkte (resp. Doppeltangenten) von C_ε zu bestimmen, welche in der Nähe von h_r liegen, substituiert man in (a) (resp. (b)) für λ und λ_1 die Werte

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = h_r + \alpha\varepsilon^m + \ldots \\ \lambda_1 = h_r + \beta\varepsilon^n + \ldots \end{array}\right\}.$$

Dann bestimmen sich die Grössen m, n, α, β in derselben Weise, wie in § 11, § 12. Will man die Werte von λ für die Doppelpunkte (resp. Doppeltangenten) bestimmen, welche durch den gegenseitigen Schnitt verschiedener Zweige entstehen, die also in der Nähe von h_s und h_t liegen, so setzt man

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda = h_s + \alpha\varepsilon^m + \ldots . \\ \lambda_1 = h_t + \beta\varepsilon^n + \ldots . \end{array}\right\}$$

in (a) (resp. (b)) ein und bestimmt m, n, α, β wie vorher.

Jede Entwickelung muss so weit geführt werden, dass kein weiterer kritischer Exponent vorkommen kann. Die ganze Anzahl von Doppelpunkten (mit Spitzen) und Doppeltangenten (mit Wendepunkten), welche für C_ε durch diese Entwickelungen erhalten werden, muss mit der Summe der Aequivalenzzahlen der zu lösenden Singularität übereinstimmen.

Man kann zeigen, dass sich die Doppelpunktsgleichungen (a) § 10 durch die folgenden ersetzen lassen:

$$\left\{\begin{array}{l} \rho + \dfrac{\rho' D}{2!} + \dfrac{\rho'' D^2}{3!} + \dfrac{\rho''' D^3}{4!} + \ldots . = 0 \\ \dfrac{1}{3!}\left(\rho\tilde{\omega}' + \dfrac{\tilde{\omega}\rho'}{2}\right) + \dfrac{D}{4!}(\rho\tilde{\omega}'' + 3\rho'\tilde{\omega}' + \rho''\tilde{\omega}) + \\ \quad + \dfrac{D^2}{5!}\left(\rho\tilde{\omega}''' + 4\rho'\tilde{\omega}'' + 6\rho''\tilde{\omega}' + \dfrac{3\rho'''\tilde{\omega}}{2}\right) + \ldots = 0 \end{array}\right\},$$

wo

$$\left\{\begin{array}{l} \rho = x' = \dfrac{dx}{d\lambda}, \rho' = x'' = \dfrac{d^2x}{d\lambda^2}, \ldots \\ \tilde{\omega} = u' = \dfrac{du}{d\lambda}, \tilde{\omega}' = u'' = \dfrac{d^2u}{d\lambda^2}, \ldots . \\ D = \lambda - \lambda_1 \end{array}\right\}.$$

Wenn man in diesen Gleichungen ρ, ρ' ρ'', ... mit $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}''$ vertauscht, so hat man die Doppeltangentengleichungen von C.

In § 9 haben wir gesehen, dass durch die Einführung von ε in ρ und $\tilde{\omega}$ die Kurve C in die Kurve C_ε deformiert wurde. Also wenn ρ_1 und $\tilde{\omega}_1$ die deformierten Formen von ρ und $\tilde{\omega}$ bezeichnen, so gehen durch Substitution von ρ_1, ρ'_1 ρ'', ... für ρ, ρ', ρ'', ... und $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_{,1}$, $\tilde{\omega}''_1$, ... für $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}''$, ... die oben gegebenen Doppelpunktsgleichungen und Doppeltangentengleichungen in die Doppelpunktsgleichungen und Doppeltangentengleichungen der Kurve C_ε über. Aus diesen letzten Gleichungen können die Doppelpunkte und Doppeltangenten, welche durch die Deformation aus der zu lösen-

den Singularität hervorgehen, durch Reihenentwickelungen gefunden werden.

Wenn λ_s und λ_t die zwei Werte von λ für einen Doppelpunkt sind, und wenn u_s, v_s und u_t v_t die Resultate der Substitution von λ_s und λ_t für λ in II. (8″) § 9 sind, so sind (u_s, v_s), (u_t, v_t) die zwei Tangenten in diesem Doppelpunkt. Ebenso wenn λ_p und λ_q die zwei Werte von λ für eine Doppeltangente sind, und wenn x_p, y_p und x_q, y_q die Resultate der Substitution von λ_p und λ_q für λ in I. (8″) § 9 sind, so sind (x_p, y_p), (x_q, y_q) die zwei Berührungspunkte dieser Doppeltangente.